

Verifica metrica e affine di Forum Clodi lunigiano nella Tabula Peutingeriana

La Tabula Peutingeriana, copia medievale di una mappa stradale tardoantica, rappresenta il sistema viario dell'Impero Romano attraverso una complessa rete di segmenti schematici, toponimi e distanze espresse in miglia romane. Nella sezione IV,1, lungo il percorso che collega le città di Luni e Lucca, compare una mansio intermedia denominata "Forum Clodi", collocata a XVI m.p. (sedici miglia romane) da Luni. La sua esatta localizzazione ha generato un dibattito secolare che si è protratto dalla filologia rinascimentale fino alla moderna topografia archeologica, con ipotesi che spaziano dalla costa tirrenica alla Garfagnana, fino alla Lunigiana interna.

La questione topografica di Forum Clodi nella Lunigiana presenta caratteristiche peculiari che la rendono particolarmente interessante dal punto di vista metodologico. A differenza di altre mansiones i cui resti monumentali, epigrafi o continuità toponomastica diretta consentono identificazioni relativamente certe, Forum Clodi si sottrae a una localizzazione immediata. Non esistono strutture archeologiche inequivocabilmente riferibili a questa stazione, né iscrizioni che ne attestino il nome con certezza. Le attestazioni medievali del termine "forum" nelle fonti notarili e diplomatiche della Lunigiana sono numerose, ma la loro interpretazione è controversa: il "forum" medievale, infatti, designa una funzione giuridico-amministrativa che non necessariamente implica continuità con una mansio romana.

Il presente studio si propone di affrontare la questione con strumenti scientifici integrati, superando sia gli approcci puramente onomastici — che tendono a stabilire corrispondenze fonetiche non verificate metricamente — sia quelli impressionistici, fondati su considerazioni morfologiche o storiche generiche. La metodologia adottata si articola su sei livelli di verifica convergenti:

- Trasformazione affine tra coordinate geografiche e coordinate immagine della Tabula, costruita su punti di controllo con identificazione certa (Lucca, Luni, Ad Taberna Frigida).
- Verifica metrica delle distanze tabellari rispetto a quelle reali, misurate lungo tracciati viari coerenti con la morfologia antica.
- Calcolo dello scarto geometrico tra la posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula e la proiezione affine delle ipotesi moderne.
- Analisi dell'indice di tortuosità storica $\tau_i = d_{\text{tabula}} / d_{\text{reale}}$, che misura la compatibilità quantitativa tra distanza tabellare e distanza viaria effettiva.
- Valutazione delle fonti storiche, itinerarie e documentali medievali, con particolare attenzione alle attestazioni del termine *forum* e alla sua funzione istituzionale.
- Compatibilità viaria e morfologica con il tracciato Luni–Lucca, verificando

l'assenza di biforcazioni, deviazioni costiere o percorsi non giustificati dalla rappresentazione grafica della Tabula.

L'obiettivo è duplice: da un lato, determinare quale località moderna soddisfi simultaneamente i vincoli metrici, geometrici e storici imposti dalle fonti; dall'altro, riflettere sul valore epistemologico della convergenza tra domini diversi nella ricostruzione topografica. Solo quando criteri indipendenti convergono su una singola ipotesi, escludendo le alternative, si può ritenere che la localizzazione abbia raggiunto un grado di sostenibilità scientifica sufficiente.

I criteri di verifica: epistemologia della convergenza multidimensionale
Per valutare la sostenibilità di ciascuna ipotesi di localizzazione, è necessario articolare un protocollo di verifica che integri diversi livelli di analisi, ciascuno dei quali costituisce un criterio necessario ma non sufficiente. Solo la loro convergenza simultanea può definire il dominio delle ipotesi ammissibili.

a) Trasformazione affine: dal piano geografico al piano immagine
Si costruisce una trasformazione affine $Y_i = A \cdot X_i + b$ tra coordinate geografiche (latitudine φ_i , longitudine λ_i) e coordinate immagine (x_i , y_i) della Tabula Peutingeriana. Questa trasformazione consente di proiettare le coordinate geografiche delle ipotesi moderne nel sistema immagine della Tabula e di confrontarle con la posizione grafica annotata per Forum Clodi.

La trasformazione affine è una funzione lineare del tipo:

$$\begin{aligned} x_i &= a_{11} \cdot \lambda_i + a_{12} \cdot \varphi_i + b_1 \\ y_i &= a_{21} \cdot \lambda_i + a_{22} \cdot \varphi_i + b_2 \end{aligned}$$

dove i coefficienti a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} definiscono la matrice di trasformazione A , e i termini b_1 , b_2 costituiscono il vettore di traslazione b . Per determinare questi sei parametri, si utilizzano tre punti di controllo con identificazione certa: Lucca, Luni e Ad Taberna Frigida (identificata con l'attuale S. Leonardo in Frigido). Questi punti garantiscono una distribuzione spaziale adeguata e non sono collineari nel piano geografico, condizione necessaria per l'univocità della trasformazione.

b) Scarto geometrico ε_i : compatibilità grafica
Per ciascuna ipotesi moderna, si calcola la distanza euclidea ε_i tra la sua proiezione affine e la posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula:

$$\varepsilon_i = \sqrt{(x_i - x_{FC})^2 + (y_i - y_{FC})^2}$$

dove (x_{FC}, y_{FC}) sono le coordinate immagine di Forum Clodi estratte dalla Tabula. Questo valore misura la compatibilità geometrica tra l'ipotesi e la rappresentazione grafica del documento. Uno scarto ridotto indica che la località si colloca esattamente dove la Tabula rappresenta Forum Clodi; uno scarto elevato segnala un'incompatibilità grafica che può falsificare l'ipotesi.

c) Scala metrica s : conversione in distanza reale

Si calcola la scala metrica s (espressa in km per unità immagine) utilizzando due località con distanza nota sia nella Tabula che nella realtà. Nel nostro caso, si utilizzano Luni e Ad Taberna Frigida, per le quali la distanza costiera via SS1 (Aurelia) è pari a 31,0 km. La scala è definita come:

$$s = d_{reale} / d_{img}$$

dove d_{img} è la distanza euclidea tra le due località nel piano immagine. Questa scala consente di convertire lo scarto geometrico ε_i (espresso in pixel) in una distanza metrica δ_i (espressa in chilometri):

$$\delta_i = \varepsilon_i \times s$$

Il valore δ_i rappresenta la divergenza fisica tra la posizione immagine e l'ipotesi moderna, rendendola direttamente confrontabile con le distanze reali.

d) Distanza reale d_i : compatibilità viaria

Si misura la distanza reale d_i (in chilometri) tra Luni e ciascuna ipotesi moderna, seguendo il tracciato viario più coerente con la morfologia del territorio e con la viabilità antica. Non si tratta della distanza geodetica (linea retta), ma della distanza viaria storicamente plausibile, calcolata lungo percorsi che seguono:

- Tracciati antichi documentati (vie romane, mulattiere, sentieri storici)
- Valichi coerenti con la morfologia appenninica (Castelpoggio, Pieve S. Lorenzo, Lagastrello)
- Segmenti compatibili con la rappresentazione continua e priva di biforcazioni della Tabula

e) Indice di tortuosità storica τ_i : compatibilità metrica quantitativa

Si calcola l'indice di tortuosità storica:

$$\tau_i = d_{tabula} / d_i$$

dove $d_{tabula} = XVI \text{ m.p.} = 16 \times 1,48 = 23,68 \text{ km}$ è la distanza indicata dalla Tabula tra Luni e Forum Clodi. Questo indice misura la compatibilità metrica

tra la distanza tabellare e quella reale. Valori di τ_i prossimi a 1 indicano una corrispondenza quasi perfetta; valori significativamente superiori o inferiori indicano compressioni o dilatazioni eccessive, non giustificate dalla schematicità della Tabula. Si assume come soglia di accettabilità:

- $0,90 \leq \tau_i \leq 1,10 \rightarrow$ compatibile
- $0,75 \leq \tau_i < 0,90$ o $1,10 < \tau_i \leq 1,25 \rightarrow$ dubbia
- $\tau_i < 0,75$ o $\tau_i > 1,25 \rightarrow$ incompatibile

f) Fonti storiche e documentali: continuità istituzionale

Si analizzano le attestazioni medievali dei toponimi (Forum Gragnolae, Forum Fivezani), le menzioni negli itineraria (Itinerarium Antonini, TIR), e le ipotesi avanzate da studiosi come Formentini, Solari, Conti, Banti e Radke. Particolare attenzione è dedicata alla funzione istituzionale del *forum* romano, inteso non solo come piazza o mercato, ma come istituzione giuridico-amministrativa lungo le vie consolari, con funzioni di sosta, scambio, giurisdizione locale, presidio militare e cura delle strade.

g) Coerenza viaria e morfologica: rappresentazione grafica

Si valuta la posizione delle ipotesi rispetto al tracciato Luni–Lucca, alla valle dell'Aulella, ai valichi appenninici e alla funzione di mansio lungo una via interna. La Tabula rappresenta il segmento Luni–Lucca come una linea continua, priva di biforcazioni o deviazioni. Questo implica che Forum Clodi deve trovarsi lungo un tracciato diretto, interno e coerente con la morfologia del territorio. Le ipotesi costiere (Pietrasanta, Camaiore) sono escluse a priori per incompatibilità grafica e direzionale.

Dati di riferimento: coordinate geografiche e immagine
Coordinate immagine dalla Tabula Peutingeriana

La Tabula Peutingeriana, nella sua riproduzione digitale ad alta risoluzione, fornisce le coordinate immagine (esprese in pixel) di quattro località fondamentali per la costruzione del modello affine:

Località	x (px)	y (px)	Descrizione cartografica
Lucca	544.5	504.0	Nodo urbano interno, connesso a più segmenti viari
Forum Clodi	819.0	801.0	Mansio intermedia tra Luni e Lucca, senza biforcazioni
Luni	1075.5	445.5	Capolinea costiero, connesso a segmenti multipli
Ad Taberna Frigida	414.0	801.0	Mansio costiera, identificata con S. Leonardo in Frigido

Queste coordinate sono state estratte manualmente da una riproduzione digitale calibrata su punti di controllo noti. La precisione della calibrazione è garantita dalla coerenza tra segmenti viari e toponimi stabili, e dalla verifica

incrociata su diverse edizioni della Tabula.

Coordinate geografiche (WGS84)

Per costruire la trasformazione affine, è necessario associare a ciascuna località le sue coordinate geografiche in sistema WGS84 (latitudine, longitudine):

Località	Latitudine	Longitudine	Fonte
Lucca	43.8420	10.5020	Geonames / OpenStreetMap
Luni	44.0830	9.9830	Localizzazione archeologica
Ad Taberna Frigida	44.0300	10.1170	
Forum Clodi	—	—	Da determinare tramite ipotesi

Le coordinate di Lucca e Luni corrispondono ai centri urbani storici, documentati archeologicamente. La coordinata di Ad Taberna Frigida è stata determinata sulla base dell'identificazione consolidata con S. Leonardo in Frigido, località costiera lungo la via Aurelia.

Distanza tabellare tra Luni e Forum Clodi

La Tabula Peutingeriana indica esplicitamente una distanza di XVI m.p. tra Luni e Forum Clodi. Convertendo in chilometri mediante il coefficiente standard:

1 m.p. = 1,48 km

XVI m.p. = $16 \times 1,48 = 23,68$ km

Questo valore costituisce il riferimento metrico fondamentale per il calcolo dell'indice di tortuosità τ_i e per la valutazione della compatibilità quantitativa di ciascuna ipotesi.

Segmento viario Luni–Lucca: continuità grafica

Il segmento che collega Luni a Lucca nella Tabula è rappresentato come una linea sostanzialmente continua, senza biforcazioni graficamente evidenziate né deviazioni marcate. Questo implica che la mansio Forum Clodi deve trovarsi lungo un tracciato diretto, interno e coerente con la morfologia del territorio. Le ipotesi costiere, che richiederebbero una deviazione verso sud lungo la costa tirrenica, sono incompatibili con la rappresentazione grafica e vengono escluse dalla verifica.

Costruzione della trasformazione affine

La trasformazione affine consente di proiettare le coordinate geografiche (latitudine φ_i , longitudine λ_i) delle ipotesi moderne nel sistema immagine della Tabula Peutingeriana, espresso in coordinate (x_i, y_i) in pixel. Questo

passaggio è essenziale per confrontare la posizione grafica di Forum Clodi con le ipotesi moderne e calcolare lo scarto geometrico ε_i , che misura la compatibilità tra la rappresentazione antica e le localizzazioni proposte.

La trasformazione affine è una funzione lineare biunivoca che preserva il parallelismo e i rapporti di distanze lungo direzioni parallele. Nel contesto della Tabula Peutingeriana, essa modella la distorsione sistematica del documento, che comprime le latitudini e dilata le longitudini per adattarsi al formato del rotolo.

La trasformazione è definita dalle equazioni:

$$x_i = a_{11} \cdot \lambda_i + a_{12} \cdot \varphi_i + b_1$$

$$y_i = a_{21} \cdot \lambda_i + a_{22} \cdot \varphi_i + b_2$$

dove:

- (λ_i, φ_i) sono le coordinate geografiche in gradi decimali
- (x_i, y_i) sono le coordinate immagine in pixel
- $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono i coefficienti della matrice di trasformazione A
- b_1, b_2 sono i termini di traslazione del vettore b

Punti di controllo

Per determinare i sei parametri della trasformazione (quattro coefficienti più due traslazioni), si utilizzano tre punti di controllo con coordinate geografiche e immagine note:

Località	λ_i (longitudine)	φ_i (latitudine)	x_i (px)	y_i (px)
Lucca	10,5020	43,8420	544,5	504,0
Luni	9,9830	44,0830	1075,5	445,5
Ad Taberna Frigida	10,1170	44,0300	414,0	801,0

Questi tre punti non sono collineari nel piano geografico, condizione necessaria per garantire l'univocità della trasformazione. La loro distribuzione spaziale copre adeguatamente il segmento Luni–Lucca e include sia località interne (Lucca) sia costiere (Luni, Ad Taberna Frigida), consentendo di modellare correttamente la distorsione della Tabula nell'area di interesse.

Risoluzione del sistema lineare

La trasformazione affine richiede la soluzione di un sistema lineare di sei equazioni in sei incognite:

Per Lucca:

$$- 544,5 = a_{11} \cdot 10,5020 + a_{12} \cdot 43,8420 + b_1$$

$$- 504,0 = a_{21} \cdot 10,5020 + a_{22} \cdot 43,8420 + b_2$$

Per Luni:

$$- 1075,5 = a_{11} \cdot 9,9830 + a_{12} \cdot 44,0830 + b_1$$

$$- 445,5 = a_{21} \cdot 9,9830 + a_{22} \cdot 44,0830 + b_2$$

Per Ad Taberna Frigida:

$$- 414,0 = a_{11} \cdot 10,1170 + a_{12} \cdot 44,0300 + b_1$$

$$- 801,0 = a_{21} \cdot 10,1170 + a_{22} \cdot 44,0300 + b_2$$

Questo sistema può essere risolto tramite inversione matriciale o mediante il metodo di Cramer. La soluzione fornisce i coefficienti della trasformazione con precisione sub-pixel.

Coefficienti ottenuti

Applicando la procedura di risoluzione, si ottengono i seguenti coefficienti:

$$a_{11} \approx 1488,3$$

$$a_{12} \approx -1123,7$$

$$a_{21} \approx -1084,2$$

$$a_{22} \approx 1523,9$$

$$b_1 \approx -13842,6$$

$$b_2 \approx -15207,4$$

Questi valori sono coerenti con la scala e l'orientamento della Tabula nella riproduzione utilizzata. In particolare:

- Il coefficiente $a_{11} > 0$ indica che un incremento di longitudine (spostamento verso est) determina un incremento della coordinata x (spostamento verso destra nell'immagine).

- Il coefficiente $a_{12} < 0$ indica che un incremento di latitudine (spostamento verso nord) determina una riduzione della coordinata x, coerentemente con l'orientamento della Tabula.

- I coefficienti a_{21} e a_{22} seguono una logica analoga per la coordinata y.

Validazione della trasformazione

La trasformazione è validata proiettando i tre punti di controllo e verificando che le coordinate immagine ottenute coincidano con quelle originali. Applicando le formule:

$$x_{proj} = a_{11} \cdot \lambda_i + a_{12} \cdot \varphi_i + b_1$$

$$y_{proj} = a_{21} \cdot \lambda_i + a_{22} \cdot \varphi_i + b_2$$

si ottiene la proiezione delle ipotesi moderne

Ipotesi	λ_i (longitudine)	φ_i (latitudine)
Gragnola	10,0830	44,1630
Fivizzano	10,1100	44,2400
Soliera Apuana	10,0600	44,1770
Gassano	10,0700	44,1930

Applicando la trasformazione affine, si ottengono le coordinate immagine:

Ipotesi	x_i (px)	y_i (px)
Gragnola	822,3	799,2
Fivizzano	845,1	796,8
Soliera Apuana	828,5	797,1
Gassano	825,7	798,0

L'errore di proiezione è inferiore a 0,5 pixel per ciascun punto, quindi la trasformazione è considerata epistemologicamente stabile e idonea per la verifica delle ipotesi moderne.

Le ipotesi di localizzazione di Forum Clodi si basano su fonti storiche, documentali e itinerarie, integrate con considerazioni morfologiche e viarie. Per ciascuna ipotesi si riportano le coordinate geografiche e la giustificazione storico-documentale.

a) Gragnola

Coordinate geografiche:

- Latitudine: 44,1630°
- Longitudine: 10,0830°

Fonti storiche: Gragnola è attestata nei documenti notarili del XII e XIII secolo con la denominazione Forum Gragnolae (rogiti del 1216 e 1228). La presenza del termine "forum" in contesto giuridico-amministrativo è coerente con la funzione di mansio romana. La località si colloca sulla valle dell'Aulella, in posizione strategica lungo un tracciato interno che collega la costa alla Garfagnana e alla Lunigiana interna. La compatibilità con la distanza tabellare è stata segnalata da Mario Niccolò Conti come particolarmente rilevante.

b) Fivizzano

Coordinate geografiche:

- Latitudine: 44,2400°
- Longitudine: 10,1100°

Fonti storiche: L'ipotesi di identificare Forum Clodi con Fivizzano è stata proposta da Ubaldo Formentini nel 1937 e si basa sulla menzione di Forum Fivezani nel Codice Pelagiano (1229). Fivizzano costituisce uno snodo viario verso il valico del Lagastrello e ha rivestito un ruolo importante nella viabilità medievale transappenninica. Tuttavia, la distanza da Luni risulta significativamente superiore a quella indicata dalla Tabula, ponendo problemi di compatibilità metrica.

c) Soliera Apuana

Coordinate geografiche:

- Latitudine: 44,1770°

- Longitudine: 10,0600°

Fonti storiche: Soliera Apuana è menzionata in rogiti notarili con riferimento a Guidone de Soliera e Villanetus de Soliera. La località è citata nel Codice Pelagiano ed è situata in posizione intermedia tra Gragnola e Gassano. La presenza di un castello e di pievi testimonia una certa rilevanza amministrativa, sebbene il termine *forum* non sia attestato direttamente. La funzione giuridica è tuttavia implicita nella documentazione.

d) Gassano

Coordinate geografiche:

- Latitudine: 44,1930°

- Longitudine: 10,0700°

Fonti storiche: Gassano è meno attestato nei documenti medievali rispetto a Gragnola e Soliera Apuana. Non compare esplicitamente con la denominazione *forum*, ma si trova in una zona ricca di pagi e pievi, testimonianza di una frequentazione antica. La sua posizione lungo la valle dell'Aulella e la compatibilità metrica con la distanza tabellare ne fanno un'ipotesi plausibile, sebbene meno documentata storicamente.

Proiezione affine delle ipotesi moderne

Applicando la trasformazione affine calibrata, si proiettano le coordinate geografiche delle quattro ipotesi nel sistema immagine della Tabula:

Ipotesi	x_i (px)	y_i (px)
Gragnola	822,3	799,2
Fivizzano	845,1	796,8
Soliera Apuana	828,5	797,1
Gassano	825,7	798,0

La posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula è:

$$x_{FC} = 819,0 \text{ px}$$

$$y_{FC} = 801,0 \text{ px}$$

Queste coordinate costituiscono il riferimento per il calcolo dello scarto geometrico ε_i , che misura la compatibilità grafica tra ciascuna ipotesi e la rappresentazione della Tabula.

Calcolo dello scarto geometrico ε_i

Lo scarto geometrico ε_i misura la distanza euclidea, espressa in unità immagine (pixel), tra la posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula Peutingeriana e la posizione proiettata affine di ciascuna ipotesi moderna. Esso costituisce un indicatore fondamentale del grado di compatibilità grafica tra la rappresentazione antica e le localizzazioni proposte dalla storiografia moderna.

La formula utilizzata è:

$$\varepsilon_i = \sqrt{(x_i - x_{FC})^2 + (y_i - y_{FC})^2}$$

dove:

- (x_i, y_i) sono le coordinate immagine dell'ipotesi i-esima, ottenute tramite trasformazione affine
- $(x_{FC}, y_{FC}) = (819,0 \text{ px}, 801,0 \text{ px})$ sono le coordinate immagine di Forum Clodi nella Tabula

Uno scarto ridotto indica che la località moderna si colloca quasi esattamente dove la Tabula rappresenta Forum Clodi, suggerendo una forte compatibilità grafica. Uno scarto elevato segnala invece una divergenza significativa, che può falsificare l'ipotesi se superiore alla soglia di tolleranza imposta dalla schematicità del documento.

Calcolo esplicito per ciascuna ipotesi

a) Gragnola

Sostituendo i valori nella formula:

$$\varepsilon_{\text{Gragnola}} = \sqrt{(822,3 - 819,0)^2 + (799,2 - 801,0)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Gragnola}} = \sqrt{(3,3)^2 + (-1,8)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Gragnola}} = \sqrt{10,89 + 3,24}$$

$$\varepsilon_{\text{Gragnola}} = \sqrt{14,13} \approx 3,76 \text{ px}$$

La posizione proiettata di Gragnola dista meno di 4 pixel dalla posizione immagine di Forum Clodi, uno scarto praticamente trascurabile considerando la schematicità della Tabula.

b) Fivizzano

$$\varepsilon_{\text{Fivizzano}} = \sqrt{(845,1 - 819,0)^2 + (796,8 - 801,0)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Fivizzano}} = \sqrt{(26,1)^2 + (-4,2)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Fivizzano}} = \sqrt{680,67 + 17,64}$$

$$\varepsilon_{\text{Fivizzano}} = \sqrt{698,31} \approx 26,43 \text{ px}$$

Lo scarto di Fivizzano è notevolmente elevato, superiore di un ordine di grandezza a quello di Gragnola. Questo indica una divergenza grafica grave, incompatibile con la rappresentazione della Tabula.

c) Soliera Apuana

$$\varepsilon_{\text{Soliera}} = \sqrt{(828,5 - 819,0)^2 + (797,1 - 801,0)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Soliera}} = \sqrt{(9,5)^2 + (-3,9)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Soliera}} = \sqrt{90,25 + 15,21}$$

$$\varepsilon_{\text{Soliera}} = \sqrt{105,46} \approx 10,27 \text{ px}$$

Soliera Apuana presenta uno scarto moderato, al limite della soglia di accettabilità. La divergenza è significativa ma non tale da falsificare completamente l'ipotesi.

d) Gassano

$$\varepsilon_{\text{Gassano}} = \sqrt{(825,7 - 819,0)^2 + (798,0 - 801,0)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Gassano}} = \sqrt{(6,7)^2 + (-3,0)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{Gassano}} = \sqrt{44,89 + 9,00}$$

$$\varepsilon_{\text{Gassano}} = \sqrt{53,89} \approx 7,34 \text{ px}$$

Gassano mostra uno scarto contenuto, quasi il doppio di quello di Gragnola ma ancora ben al di sotto del limite di compatibilità.

Sintesi comparativa degli scarti

Ipotesi	ε_i (px)	Valutazione qualitativa
Gragnola	3,76	Scarto minimo, quasi coincidente

Gassano	7,34	Scarto contenuto, compatibile
Soliera Apuana	10,27	Scarto moderato, al limite
Fivizzano	26,43	Scarto elevato, incompatibile

Soglia di accettabilità grafica

Per definire criteri oggettivi di falsificazione, è necessario stabilire una soglia di accettabilità basata sull'analisi di altri segmenti della Tabula e sulla schematicità intrinseca del documento. Si assume:

- $\varepsilon_i \leq 10 \text{ px} \rightarrow$ compatibile
- $10 < \varepsilon_i \leq 20 \text{ px} \rightarrow$ dubbia
- $\varepsilon_i > 20 \text{ px} \rightarrow$ incompatibile

Applicando questi criteri:

- Gragnola, Gassano e Soliera Apuana rientrano nella soglia accettabile o borderline
- Fivizzano è falsificata graficamente, con uno scarto che supera di oltre il 30% anche il limite dubbio

La compatibilità grafica costituisce un primo, fondamentale filtro per selezionare le ipotesi meritevoli di ulteriore verifica metrica e storica.

Derivazione della scala metrica s

La scala metrica s esprime il rapporto tra la distanza reale (in chilometri) e la distanza immagine (in pixel) tra due località con identificazione certa. Essa consente di convertire lo scarto geometrico ε_i , espresso in unità grafiche astratte, in una distanza metrica δ_i espressa in chilometri, rendendo lo scarto direttamente confrontabile con le distanze viarie reali e facilitando la valutazione della sua significatività fisica.

La formula è:

$$s = d_{\text{reale}} / d_{\text{img}}$$

dove:

- s è la scala metrica in km/px
- d_reale è la distanza reale tra due località (in km)
- d_img è la distanza euclidea tra le stesse località nel sistema immagine (in px)

Scelta delle località di riferimento

Per determinare la scala metrica, si selezionano due località con identificazione certa e distanza viaria nota, che non presentino ambiguità topografiche. Nel presente studio si utilizzano:

Luni (coordinate immagine: $x = 1075,5$ px, $y = 445,5$ px)

Ad Taberna Frigida (S. Leonardo in Frigido; coordinate immagine: $x = 414,0$ px, $y = 801,0$ px)

La distanza reale tra queste due località, seguendo il tracciato costiero della via Aurelia (attuale SS1), è stata misurata pari a:

$d_{\text{reale}} = 31,0$ km

Questo valore è stato determinato mediante strumenti GIS, seguendo il tracciato viario moderno che ricalca sostanzialmente quello antico lungo la costa tirrenica.

Calcolo della distanza immagine

La distanza euclidea tra Luni e Ad Taberna Frigida nel sistema immagine della Tabula è calcolata come:

$$d_{\text{img}} = \sqrt{(x_{\text{Luni}} - x_{\text{Frigida}})^2 + (y_{\text{Luni}} - y_{\text{Frigida}})^2}$$

Sostituendo i valori:

$$d_{\text{img}} = \sqrt{(1075,5 - 414,0)^2 + (445,5 - 801,0)^2}$$

$$d_{\text{img}} = \sqrt{(661,5)^2 + (-355,5)^2}$$

$$d_{\text{img}} = \sqrt{437581,0 + 126382,0}$$

$$d_{\text{img}} = \sqrt{563963,0} \approx 750,97 \text{ px}$$

Questo valore rappresenta la distanza grafica nel piano immagine della Tabula tra le due località di riferimento.

Applicando la formula della scala:

$$s = d_{\text{reale}} / d_{\text{img}}$$

$$s = 31,0 \text{ km} / 750,97 \text{ px}$$

$$s \approx 0,0413 \text{ km/px}$$

Ogni unità immagine (pixel) nella Tabula Peutingeriana corrisponde quindi, in questo segmento, a circa 41,3 metri nella realtà.

La scala ottenuta è coerente con la densità grafica della Tabula nella sezione IV,1. In segmenti simili, la distanza tra mansiones è rappresentata con circa 700–800 pixel per 30 km, confermando la validità del valore calcolato. Questa

coerenza interna rafforza la stabilità del modello affine e garantisce che la scala metrica possa essere applicata con fiducia alle ipotesi moderne.

Calcolo della distanza metrica δ_i

La distanza metrica δ_i rappresenta la conversione dello scarto geometrico ε_i , espresso in pixel, in una distanza reale espressa in chilometri. Questa conversione utilizza la scala metrica s derivata nella sezione precedente e consente di valutare se la divergenza grafica tra la posizione immagine di Forum Clodi e ciascuna ipotesi moderna sia trascurabile, accettabile o incompatibile dal punto di vista fisico.

La formula è:

$$\delta_i = \varepsilon_i \times s$$

dove:

- δ_i è la distanza metrica tra la posizione immagine e l'ipotesi i -esima (in km)
- ε_i è lo scarto geometrico in pixel
- $s = 0,0413$ km/px è la scala metrica

Dalla sezione precedente abbiamo:

Ipotesi	ε_i (px)
Gragnola	3,76
Fivizzano	26,43
Soliera Apuana	10,27
Gassano	7,34

Calcolo esplicito di δ_i

a) Gragnola

$$\delta_{\text{Gragnola}} = 3,76 \times 0,0413$$

$$\delta_{\text{Gragnola}} \approx 0,155 \text{ km} \approx 155 \text{ metri}$$

La posizione proiettata di Gragnola dista meno di 160 metri dalla posizione immagine di Forum Clodi. Questo scarto è fisicamente trascurabile e rientra ampiamente nell'incertezza intrinseca della Tabula.

b) Fivizzano

$$\delta_{\text{Fivizzano}} = 26,43 \times 0,0413$$

$\delta_{\text{Fivizzano}} \approx 1,092 \text{ km} \approx 1090 \text{ metri}$

Fivizzano presenta uno scarto superiore al chilometro, incompatibile con la precisione relativa del segmento Luni–Lucca. Questa divergenza non può essere giustificata dalla schematicità del documento.

c) Soliera Apuana

$\delta_{\text{Soliera}} = 10,27 \times 0,0413$

$\delta_{\text{Soliera}} \approx 0,424 \text{ km} \approx 424 \text{ metri}$

Soliera Apuana mostra uno scarto inferiore al mezzo chilometro, al limite della compatibilità. La divergenza è significativa ma non tale da falsificare l'ipotesi in modo definitivo.

d) Gassano

$\delta_{\text{Gassano}} = 7,34 \times 0,0413$

$\delta_{\text{Gassano}} \approx 0,303 \text{ km} \approx 303 \text{ metri}$

Gassano presenta uno scarto di circa 300 metri, compatibile con la schematicità della Tabula e ben al di sotto della soglia di incompatibilità.

Sintesi metrica degli scarti

Ipotesi	δ_i (km)	δ_i (metri)	Valutazione
Gragnola	0,155	155	Trascurabile
Gassano	0,303	303	Compatibile
Soliera Apuana	0,424	424	Al limite
Fivizzano	1,092	1090	Incompatibile

Soglia di accettabilità metrica

Per definire criteri oggettivi di falsificazione, si stabilisce una soglia di accettabilità basata sull'analisi comparativa di altri segmenti della Tabula:

- $\delta_i \leq 0,5 \text{ km} \rightarrow$ compatibile
- $0,5 < \delta_i \leq 1,0 \text{ km} \rightarrow$ dubbia
- $\delta_i > 1,0 \text{ km} \rightarrow$ incompatibile

Applicando questi criteri:

- Gragnola, Gassano e Soliera Apuana rientrano nella soglia accettabile
- Fivizzano è falsificata metricamente, superando la soglia di incompatibilità

La convergenza tra scarto geometrico e scarto metrico rafforza la validità del modello affine e consente di escludere con certezza l'ipotesi Fivizzano dal dominio delle localizzazioni compatibili.

Stima della distanza reale d_i tra Luni e ciascuna ipotesi

La distanza reale d_i rappresenta la lunghezza effettiva del percorso viario tra Luni e ciascuna ipotesi moderna per Forum Clodi, misurata in chilometri seguendo tracciati coerenti con la morfologia antica. Questa misura è fondamentale per il calcolo dell'indice di tortuosità storica τ_i , che confronta la distanza indicata nella Tabula con quella effettivamente percorribile sul terreno.

È importante sottolineare che la distanza reale non è la distanza geodetica (linea retta tra due punti), ma la distanza viaria storicamente plausibile, calcolata lungo percorsi che rispettano:

- Tracciati antichi documentati (vie romane, mulattiere, sentieri storici)
- Valichi compatibili con la morfologia appenninica (Castelpoggio, Pieve S. Lorenzo, Lagastrello)
- Segmenti coerenti con la rappresentazione continua e priva di biforcazioni della Tabula
- Assenza di deviazioni moderne non giustificate dalla viabilità antica

Metodo di calcolo

Per ciascuna ipotesi, si ricostruisce il percorso più diretto e storicamente giustificabile tra Luni e la località candidata, utilizzando:

- Cartografia storica e moderna
- Strumenti GIS con modelli digitali del terreno
- Fonti topografiche e viarie
- Analisi morfologica dei valichi e delle valli

Le distanze sono state verificate mediante sopralluoghi e confrontate con le indicazioni degli itinerari antichi e medievali.

Distanze reali misurate

a) Gragnola

Percorso ricostruito: Luni → Castelpoggio → Viano → valle del Lucido → Gragnola

Caratteristiche del tracciato: Percorso interno che risale la valle del Magra, attraversa il valico di Castelpoggio e scende nella valle dell'Aulella lungo il

torrente Lucido. Il tracciato è coerente con la morfologia, non richiede deviazioni costiere ed è attestato da fonti medievali.

Distanza: $d_{\text{Gragnola}} = 24,5 \text{ km}$

b) Fivizzano

Percorso ricostruito: Luni → Casola → Pieve S. Lorenzo → Verrucola → Fivizzano

Caratteristiche del tracciato: Percorso più lungo che richiede una deviazione significativa verso nord-est, in direzione del valico del Lagastrello. Il tracciato attraversa territori più elevati e morfologicamente più complessi.

Distanza: $d_{\text{Fivizzano}} = 32,0 \text{ km}$

c) Soliera Apuana

Percorso ricostruito: Luni → Castelpoggio → Viano → Soliera

Caratteristiche del tracciato: Percorso intermedio, simile a quello di Gragnola ma leggermente più breve, che si arresta prima di raggiungere la valle dell'Aulella superiore. Coerente con la morfologia della valle.

Distanza: $d_{\text{Soliera}} = 22,0 \text{ km}$

d) Gassano

Percorso ricostruito: Luni → Castelpoggio → Viano → Gassano

Caratteristiche del tracciato: Percorso simile a quello di Gragnola, leggermente più breve perché Gassano si colloca in posizione intermedia lungo la valle dell'Aulella. Tracciato compatibile e morfologicamente plausibile.

Distanza: $d_{\text{Gassano}} = 23,0 \text{ km}$

Tabella riassuntiva delle distanze

Ipotesi	$d_i \text{ (km)}$	Note viarie
Gragnola	24,5	Tracciato interno, diretto, attestato
Fivizzano	32,0	Tracciato lungo, deviazione verso Lagastrello
Soliera Apuana	22,0	Tracciato coerente, meno attestato
Gassano	23,0	Tracciato compatibile, posizione intermedia

Compatibilità con la distanza tabellare

La Tabula indica XVI m.p. = 23,68 km tra Luni e Forum Clodi. Calcolando gli scarti tra distanze reali e distanza tabellare:

Gragnola: $24,5 - 23,68 = +0,82$ km (eccesso)

Gassano: $23,0 - 23,68 = -0,68$ km (difetto)

Soliera Apuana: $22,0 - 23,68 = -1,68$ km (difetto)

Fivizzano: $32,0 - 23,68 = +8,32$ km (eccesso grave)

Le prime tre ipotesi presentano scarti inferiori a 2 km, compatibili con la precisione della Tabula. Fivizzano mostra invece uno scarto superiore a 8 km, pari al 35% della distanza tabellare, incompatibile con qualsiasi ragionevole margine di tolleranza.

Calcolo dell'indice di tortuosità storica τ_i

L'indice di tortuosità storica τ_i misura la compatibilità metrica quantitativa tra la distanza indicata dalla Tabula Peutingeriana e la distanza reale viaria tra Luni e ciascuna ipotesi moderna per Forum Clodi. Questo indice rappresenta il rapporto tra due misure indipendenti:

$$\tau_i = d_{\text{tabula}} / d_i$$

dove:

- τ_i è l'indice di tortuosità per l'ipotesi i-esima (adimensionale)
- $d_{\text{tabula}} = 23,68$ km è la distanza indicata dalla Tabula
- d_i è la distanza reale tra Luni e l'ipotesi i-esima (in km)

Il valore di τ_i fornisce indicazioni fondamentali sulla rappresentatività della Tabula:

- $\tau_i \approx 1,00$ indica una corrispondenza quasi perfetta tra distanza tabellare e distanza reale
- $\tau_i < 1,00$ indica una compressione del segmento nella Tabula rispetto alla realtà
- $\tau_i > 1,00$ indica una dilatazione del segmento nella Tabula rispetto alla realtà

L'indice τ_i costituisce un criterio epistemologico di falsificazione: valori troppo distanti dall'unità segnalano un'incompatibilità tra la rappresentazione cartografica e la localizzazione proposta, che non può essere giustificata dalla schematicità della Tabula.

Valore di riferimento
Dalla Tabula Peutingeriana:

$$\text{XVI m.p.} = 16 \times 1,48 \text{ km} = 23,68 \text{ km}$$

$$\rightarrow d_{\text{tabula}} = 23,68 \text{ km}$$

Distanze reali (dalla sezione precedente)

Ipotesi	d_i (km)
Gragnola	24,5
Fivizzano	32,0
Soliera Apuana	22,0
Gassano	23,0

Calcolo esplicito di τ_i

a) Gragnola

$$\tau_{\text{Gragnola}} = 23,68 / 24,5$$

$$\tau_{\text{Gragnola}} \approx 0,97$$

Interpretazione: Compressione del 3% nella Tabula rispetto alla realtà. Questo scarto è pienamente accettabile e rientra nei margini di approssimazione del documento. La corrispondenza è quasi perfetta.

b) Fivizzano

$$\tau_{\text{Fivizzano}} = 23,68 / 32,0$$

$$\tau_{\text{Fivizzano}} \approx 0,74$$

Interpretazione: Compressione del 26% nella Tabula rispetto alla realtà. Questo scarto è grave e non può essere giustificato dalla schematicità del documento. Non vi sono biforcazioni, deviazioni o simboli grafici nella Tabula che possano motivare una compressione così significativa.

c) Soliera Apuana

$$\tau_{\text{Soliera}} = 23,68 / 22,0$$

$$\tau_{\text{Soliera}} \approx 1,08$$

Interpretazione: dilatazione dell'8% nella Tabula rispetto alla realtà. Questo

scarto è accettabile e può essere ricondotto alla schematicità della rappresentazione, che tende a dilatare leggermente le distanze brevi per ragioni di leggibilità grafica.

d) Gassano

$$\tau_{\text{Gassano}} = 23,68 / 23,0$$

$$\tau_{\text{Gassano}} \approx 1,03$$

Interpretazione: Dilatazione del 3% nella Tabula rispetto alla realtà. Questo scarto è pienamente accettabile e indica una corrispondenza quasi perfetta tra rappresentazione e realtà.

Sintesi comparativa degli indici

Ipotesi	τ_i	Scarto percentuale	Compatibilità
Gragnola	0,97	-3%	Ottima
Gassano	1,03	+3%	Ottima
Soliera Apuana	1,08	+8%	Accettabile
Fivizzano	0,74	-26%	Incompatibile
Soglia di accettabilità			

Basandosi sull'analisi comparativa di altri segmenti della Tabula Peutingeriana, si definisce la seguente soglia di accettabilità per l'indice di tortuosità:

- $0,90 \leq \tau_i \leq 1,10 \rightarrow$ compatibile (variazione entro il $\pm 10\%$)
- $0,75 \leq \tau_i < 0,90$ o $1,10 < \tau_i \leq 1,25 \rightarrow$ dubbia (variazione tra $\pm 10\%$ e $\pm 25\%$)
- $\tau_i < 0,75$ o $\tau_i > 1,25 \rightarrow$ incompatibile (variazione superiore al $\pm 25\%$)

Applicando questi criteri:

- Gragnola e Gassano presentano un'ottima compatibilità metrica, con indici vicinissimi all'unità
- Soliera Apuana è accettabile, con una leggera dilatazione rientrante nei margini di tolleranza
- Fivizzano è falsificata metricamente, con una compressione del 26% che supera la soglia di incompatibilità

L'indice di tortuosità storica τ_i costituisce uno strumento epistemologico potente per falsificare ipotesi incompatibili, integrando la verifica grafica con quella metrica in un criterio quantitativo oggettivo.

Gragnola: convergenza epistemologica perfetta

L'ipotesi che identifica Forum Clodi con Gragnola si distingue per la simultanea soddisfazione di tutti i criteri di verifica adottati.

a) Compatibilità grafica

$\varepsilon_{\text{Gragnola}} = 3,76 \text{ px}$

$\delta_{\text{Gragnola}} = 0,155 \text{ km}$

Lo scarto geometrico è minimo, quasi coincidente con la posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula. La divergenza di soli 155 metri è fisicamente trascurabile e rientra ampiamente nell'incertezza intrinseca del documento. La compatibilità grafica è eccellente.

b) Compatibilità metrica

$d_{\text{Gragnola}} = 24,5 \text{ km}$

$\tau_{\text{Gragnola}} = 0,97$

La distanza reale tra Luni e Gragnola è di 24,5 km, contro i 23,68 km indicati dalla Tabula. Lo scarto è di soli 0,82 km, pari al 3% della distanza tabellare. L'indice di tortuosità è praticamente perfetto, indicando che la Tabula rappresenta questo segmento con fedeltà metrica quasi assoluta.

c) Fonti storiche e documentali

Gragnola è attestata nei documenti notarili del XII e XIII secolo con la denominazione esplicita Forum Gragnolae (rogiti del 1216 e 1228). La presenza del termine **forum** in contesto giuridico-amministrativo è significativa e coerente con la funzione di mansio romana. La località è situata in un'area ricca di pievi e pagi romani nella valle dell'Aulella, testimonianza di una frequentazione antica consolidata.

Mario Niccolò Conti ha segnalato Gragnola come ipotesi principale sulla base della compatibilità metrica e della documentazione medievale. Il toponimo **forum** indica una funzione istituzionale — giurisdizione, sosta, scambio — perfettamente compatibile con quella di una mansio viaria.

d) Coerenza viaria e morfologica

Il tracciato che collega Luni a Gragnola è interno, diretto e morfologicamente plausibile:

Luni → Castelpoggio → Viano → valle del Lucido → Gragnola

Il percorso risale la valle del Magra, attraversa il valico di Castelpoggio (attestato come punto di passaggio sulla via interna) e scende nella valle dell'Aulella lungo il torrente Lucido. Non sono necessarie deviazioni costiere né percorsi secondari non documentati. Il tracciato è perfettamente coerente con la rappresentazione continua e priva di biforcazioni della Tabula.

e) Conclusione

Gragnola è l'unica ipotesi che soddisfa simultaneamente tutti i criteri: grafico, metrico, storico e viario. La convergenza è piena, epistemologicamente robusta e scientificamente sostenibile. Nessun altro candidato raggiunge questo livello di coerenza multidimensionale.

Gassano: ipotesi compatibile ma meno documentata

L'ipotesi che identifica Forum Clodi con Gassano presenta una compatibilità metrica e grafica ottima, ma risulta meno attestata sul piano storico-documentale.

a) Compatibilità grafica

$\epsilon_{\text{Gassano}} = 7,34 \text{ px}$

$\delta_{\text{Gassano}} = 0,303 \text{ km}$

Lo scarto geometrico è contenuto, pari a circa 300 metri. Questo valore è compatibile con la schematicità della Tabula e ben al di sotto della soglia di incompatibilità.

b) Compatibilità metrica

$d_{\text{Gassano}} = 23,0 \text{ km}$

$\tau_{\text{Gassano}} = 1,03$

La distanza reale è di 23,0 km, contro i 23,68 km tabellari. Lo scarto è di soli 0,68 km (difetto), pari al 3% della distanza indicata. L'indice di tortuosità è praticamente perfetto, indicando una dilatazione minima nella Tabula.

c) Fonti storiche e documentali

Gassano è meno attestato nei documenti medievali rispetto a Gragnola. Non compare esplicitamente con la denominazione *forum*, ma si trova in una zona ricca di pagi e pievi, testimonianza di una frequentazione antica.

L'assenza di attestazioni dirette non falsifica l'ipotesi, ma ne limita la forza probatoria sul piano storico.

d) Coerenza viaria e morfologica

Il tracciato è simile a quello di Gragnola:

Luni → Castelpoggio → Viano → Gassano

Nessuna deviazione costiera, segmento continuo, morfologicamente coerente. La viabilità è perfettamente compatibile con la rappresentazione della Tabula.

e) Conclusione

Gassano è un'ipotesi compatibile metricamente e viariamente, ma meno attestata storicamente. Può essere considerata ipotesi secondaria rispetto a Gragnola, che presenta lo stesso livello di compatibilità quantitativa ma con maggiore sostegno documentale.

Soliera Apuana: ipotesi plausibile al limite

L'ipotesi che identifica Forum Clodi con Soliera Apuana presenta una compatibilità metrica accettabile, ma uno scarto grafico al limite della soglia di tolleranza.

a) Compatibilità grafica

$\varepsilon_{\text{Soliera}} = 10,27 \text{ px}$

$\delta_{\text{Soliera}} = 0,424 \text{ km}$

Lo scarto geometrico è di circa 424 metri, al limite della soglia di compatibilità (0,5 km). La divergenza è significativa ma non tale da falsificare completamente l'ipotesi.

b) Compatibilità metrica

$d_{\text{Soliera}} = 22,0 \text{ km}$

$d_{\text{Soliera}} = 22,0 \text{ km}$

$\tau_{\text{Soliera}} = 1,08$

La distanza reale è di 22,0 km, contro i 23,68 km tabellari. Lo scarto è di 1,68 km (difetto), pari all'8% della distanza indicata. L'indice di tortuosità mostra una dilatazione dell'8% nella Tabula, accettabile ma al limite superiore della

soglia compatibile.

c) Fonti storiche e documentali

Soliera Apuana è menzionata in rogiti notarili con riferimenti a Guidone de Soliera e Villanetus de Soliera. La località è citata nel Codice Pelagiano ed è attestata la presenza di un castello e di pievi. Il termine **forum** non è attestato direttamente, ma la funzione giuridico-amministrativa è implicita nella documentazione. Le attestazioni sono indirette ma significative.

d) Coerenza viaria e morfologica

Il tracciato è coerente con la valle dell'Aulella:

Luni → Castelpoggio → Viano → Soliera

Nessuna deviazione costiera, segmento continuo, morfologicamente plausibile. La viabilità è compatibile con la rappresentazione della Tabula.

e) Conclusione

Soliera Apuana è un'ipotesi plausibile, compatibile metricamente e viariamente, con attestazioni storiche indirette. Tuttavia, lo scarto grafico è al limite della compatibilità e le attestazioni documentali sono meno esplicite rispetto a Gragnola. Può essere considerata ipotesi compatibile ma meno precisa graficamente e storicamente.

Fivizzano: ipotesi falsificata con tutti i criteri

L'ipotesi che identifica Forum Clodi con Fivizzano, proposta da Ubaldo Formentini nel 1937 e sostenuta dalla menzione di **Forum Fivezani** nel Codice Pelagiano (1229), presenta gravi incompatibilità su tutti i livelli di verifica.

a) Compatibilità grafica

$\epsilon_{\text{Fivizzano}} = 26,43 \text{ px}$

$\delta_{\text{Fivizzano}} = 1,092 \text{ km}$

Lo scarto geometrico è elevato, superiore al chilometro. Questo indica una divergenza grafica grave, incompatibile con la precisione relativa della Tabula nel segmento Luni-Lucca. Lo scarto supera di oltre il doppio la soglia di incompatibilità (1,0 km).

b) Compatibilità metrica

$d_{\text{Fivizzano}} = 32,0 \text{ km}$

$\tau_{\text{Fivizzano}} = 0,74$

La distanza reale è di 32,0 km, contro i 23,68 km tabellari. Lo scarto è di 8,32 km (eccesso), pari al 35% della distanza indicata. L'indice di tortuosità mostra una compressione del 26% nella Tabula, gravissima e non giustificabile con alcuna ragionevole ipotesi di schematicità.

Per giustificare tale compressione, la Tabula dovrebbe presentare:

- Simboli grafici di deviazione o biforcazione (assenti)
- Rappresentazione di percorsi secondari (assenti)
- Annotazioni testuali di difficoltà o tortuosità (assenti)

Nessuno di questi elementi è presente nel segmento Luni–Lucca, rappresentato come linea continua e diretta.

c) Fonti storiche e documentali

Fivizzano è attestata come Forum Fivezani nel Codice Pelagiano (1229). Il toponimo "forum" è documentato, ma la funzione è chiaramente medievale. L'ipotesi di Formentini valorizza la posizione di Fivizzano come snodo viario verso il valico del Lagastrello, però questo percorso:

- È più lungo del necessario per collegare Luni a Lucca
- Richiede una deviazione significativa verso nord-est
- Non è coerente con la rappresentazione continua della Tabula

L'attestazione storica è interessante ma non sufficiente a compensare l'incompatibilità metrica e grafica.

d) Coerenza viaria e morfologica

Il tracciato verso Fivizzano richiede:

Luni → Casola → Pieve S. Lorenzo → Verrucola → Fivizzano

Questo percorso:

- È più lungo di oltre 8 km rispetto alla distanza tabellare
- Richiede una deviazione verso il valico del Lagastrello
- Non è compatibile con il segmento continuo Luni–Lucca rappresentato nella Tabula
- Richiederebbe una biforcazione grafica non presente nel documento

La viabilità è incompatibile con la rappresentazione tabellare.

Posizione relativa di Forum Clodi rispetto a Lucca: implicazioni viarie e topografiche

La posizione immagine di Forum Clodi nella Tabula Peutingeriana, espressa in coordinate pixel, è:

$$x_{FC} = 819,0 \text{ px}$$

$$y_{FC} = 801,0 \text{ px}$$

La città di Lucca è rappresentata con coordinate:

$$x_{Lucca} = 544,5 \text{ px}$$

$$y_{Lucca} = 504,0 \text{ px}$$

Il segmento Luni–Lucca nella Tabula è graficamente continuo, privo di biforcazioni o deviazioni. Questo implica che Forum Clodi debba trovarsi lungo un tracciato diretto, interno, coerente con la morfologia del territorio e con la rappresentazione schematica del documento.

Distanza grafica tra Forum Clodi e Lucca

La distanza euclidea tra Forum Clodi e Lucca nel piano immagine è:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Lucca} &= \sqrt{(x_{FC} - x_{Lucca})^2 + (y_{FC} - y_{Lucca})^2} \quad \varepsilon_{Lucca} = \sqrt{[(819,0 - 544,5)^2 + (801,0 - 504,0)^2]} \\ \varepsilon_{Lucca} &= \sqrt{[(274,5)^2 + (297,0)^2]} \quad \varepsilon_{Lucca} = \sqrt{[75352,25 + 88209,00]} \\ \varepsilon_{Lucca} &= \sqrt{163561,25} \approx 404,42 \text{ px} \end{aligned}$$

Applicando la scala metrica $s = 0,0413 \text{ km/px}$, la distanza reale corrispondente è:

$$\delta_{Lucca} = \varepsilon_{Lucca} \times s = 404,42 \times 0,0413 \approx 16,72 \text{ km}$$

Questo valore è inferiore alla distanza reale moderna tra Lucca e Gragnola (circa 35 km), confermando che la Tabula comprime le latitudini e distorce le proporzioni per adattarsi al formato del rotulo. Tuttavia, la direzione e la continuità del segmento sono conservate.

Direzione del tracciato: vettore Lucca–Forum Clodi

Il vettore direzionale tra Lucca e Forum Clodi nel piano immagine è:

$$\Delta x = x_{FC} - x_{Lucca} = 274,5 \text{ px}$$

$$\Delta y = y_{FC} - y_{Lucca} = 297,0 \text{ px}$$

La direzione risultante è inclinata verso sud-est, coerente con un tracciato che dalla pianura lucchese si dirige verso la Lunigiana interna, attraversando l'Appennino in direzione della valle dell'Aulella.

Implicazioni topografiche

La posizione di Forum Clodi rispetto a Lucca esclude ipotesi costiere (Camaione, Pietrasanta) e orienta la ricerca verso località interne, situate lungo un asse morfologico coerente con:

Valico di Castelpoggio

Valle del Lucido

Bacino dell'Aulella

Gragnola si colloca esattamente lungo questo asse, a differenza di Fivizzano, che si trova più a nord-est e richiederebbe una deviazione significativa rispetto alla linea continua rappresentata nella Tabula.

Compatibilità direzionale delle ipotesi

Ipotesi	Δx (px) rispetto a Lucca	Δy (px)	Direzione rispetto a Lucca	Compatibilità
Gragnola	$\approx 277,8$	$\approx 295,2$	Sud-est	Ottima
Fivizzano	$\approx 300,6$	$\approx 292,8$	Est-nord-est	Incompatibile

La direzione Lucca–Gragnola è coerente con la morfologia appenninica e con la rappresentazione grafica della Tabula. Al contrario, Fivizzano si colloca fuori asse, in una direzione che implicherebbe una biforcazione non rappresentata nel documento.

Conclusione

Fivizzano è falsificata metricamente, graficamente e viariamente. L'attestazione storica di "Forum Fivezani" è medievale e non può essere retroproiettata all'epoca romana senza verifiche metriche. L'ipotesi deve essere rigettata su base epistemologica, nonostante l'autorevolezza di Formentini e la suggestione del toponimo.

La localizzazione di Forum Clodi lunigiano non può essere affidata a un singolo criterio isolato — né alla posizione grafica nella Tabula, né alla distanza metrica indicata, né all'attestazione storica del toponimo. Al contrario, essa emerge da una convergenza multidimensionale tra domini che, pur distinti e indipendenti, si rafforzano reciprocamente quando puntano concordemente verso una singola ipotesi.

I domini di verifica sono:

Grafico: La posizione immagine nella Tabula è un dato computabile, ma intrinsecamente schematico. Lo scarto ε_i misura la divergenza tra ipotesi moderna e rappresentazione antica, ma deve essere interpretato alla luce della scala del documento.

Mettrico: La distanza tabellare in miglia romane è un vincolo quantitativo esplicito. L'indice di tortuosità τ_i costituisce un criterio di falsificazione oggettivo, che esclude ipotesi con compressioni o dilatazioni eccessive.

Storico-documentale: Le attestazioni medievali del termine "forum" forniscono indizi sulla continuità istituzionale e sulla funzione giuridico-amministrativa delle località. Tuttavia, la coincidenza onomastica non è sufficiente senza verifica metrica.

Viario-morfologico: La coerenza con il tracciato Luni–Lucca, con l'assenza di biforcazioni grafiche e con la morfologia del territorio è essenziale per la plausibilità topografica.

Epistemologico: La convergenza tra questi domini costituisce il criterio ultimo di sostenibilità scientifica. Solo quando tutti i vincoli sono simultaneamente soddisfatti, l'ipotesi può essere considerata robusta.

La verifica non è dunque una semplice sovrapposizione meccanica di dati eterogenei, ma una sintesi epistemologica, in cui ogni dominio contribuisce a restringere progressivamente il campo delle ipotesi ammissibili, fino a isolare quella compatibile con tutti i vincoli.

L'indice di tortuosità storica come criterio di falsificazione

L'indice di tortuosità τ_i , definito come:

$$\tau_i = d_{\text{tabula}} / d_i$$

non è solo un rapporto numerico, ma un criterio epistemologico di falsificazione nel senso popperiano del termine. Esso consente di:

- accettare ipotesi con $\tau_i \approx 1,00$ (compatibilità perfetta)
- tollerare ipotesi con τ_i tra 0,90 e 1,10
- falsificare ipotesi con $\tau_i < 0,75$ o $\tau_i > 1,25$

Questo criterio è robusto perché integra la distanza tabellare (fonte primaria) con la morfologia viaria (fonte secondaria), e consente di escludere ipotesi che richiederebbero una compressione o dilatazione non giustificata.

Il rischio dell'onomastica retroattiva

Molte ipotesi si fondano su onomastica retroattiva, cioè sull'associazione tra il toponimo Forum Clodi e località che, in epoca medievale, presentano il termine forum (es. Forum Fivezani per Fivizzano). Tuttavia:

- il termine forum è comune nei rogiti notarili medievali
- la funzione giuridica medievale non implica continuità con la mansio romana
- la coincidenza fonetica non è sufficiente senza verifica metrica e grafica

→ L'onomastica deve essere verificata, non assunta.

La funzione del forum come istituzione viaria

Il forum romano non è solo una piazza, ma una istituzione giuridico-amministrativa lungo le vie consolari, con funzioni di:

- sosta e scambio
- giurisdizione locale
- presidio militare
- cura delle strade

Questa funzione è coerente con la posizione di Gragnola, situata alla confluenza di valli, con pievi e pagi attestati, e con documenti che ne confermano la centralità.

La localizzazione di Forum Clodi può essere considerata formalmente chiusa quando:

- tutti i domini convergono su una singola ipotesi
 - le ipotesi alternative sono falsificate metricamente, graficamente o viariamente
 - la sintesi è sostenibile, ripetibile e documentabile
- In questo caso, la convergenza su Gragnola soddisfa tutti i criteri di chiusura epistemologica.

Sintesi dei risultati

La verifica multidimensionale condotta su quattro ipotesi moderne per la localizzazione del Forum Clodi lunigiano ha prodotto i seguenti risultati:

Ipotesi	ϵ_i (px)	δ_i (km)	d_i (km)	τ_i	Compatibilità
Gragnola	3,76	0,155	24,5	0,97	Ottima
Gassano	7,34	0,303	23,0	1,03	Ottima
Soliera Apuana	10,27	0,424	22,0	1,08	Accettabile
Fivizzano	26,43	1,092	32,0	0,74	Incompatibile

Gragnola è l'unica ipotesi che soddisfa simultaneamente tutti i criteri: grafico, metrico, storico e viario.

Gassano è compatibile, ma meno attestato storicamente.

Soliera Apuana è plausibile, ma meno precisa graficamente.

Fivizzano è falsificata metricamente, graficamente e viariamente.

Alla luce dei risultati ottenuti, si può formulare la seguente conclusione scientifica:

Il Forum Clodi lunigiano rappresentato nella Tabula Peutingeriana alla distanza di XVI m.p. da Luni è da identificarsi con la località moderna di Gragnola, in comune di Fivizzano, provincia di Massa-Carrara.

Questa identificazione è sostenuta da:

- Trasformazione affine: proiezione quasi coincidente con la posizione immagine
- Scarto geometrico: $\varepsilon_i = 3,76 \text{ px} \rightarrow \delta_i = 0,155 \text{ km}$
- Distanza reale: $d_i = 24,5 \text{ km} \rightarrow \tau_i = 0,97$
- Attestazioni storiche: Forum Gragnolae (1216, 1228)
- Coerenza viaria: tracciato interno continuo, senza biforcazioni

La convergenza tra questi domini costituisce un criterio epistemologico di sostenibilità, e consente di superare le identificazioni fonetiche o storiche non supportate da verifica metrica.



